

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К РК–1 ПО ТЕМЕ

“Равномерная сходимость”

для ИУ-9 и ФН-12, 3 семестр, лектор Четвериков В.Н.

1. Дать определение равномерной сходимости функциональной последовательности. Сформулировать и доказать критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. (3 балла)
2. Сформулировать и доказать признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. (3 балла)
3. Сформулировать и доказать признак Лейбница равномерной сходимости функционального ряда. (3 балла)
4. Сформулировать и доказать теорему о почленном переходе к пределу в равномерно сходящемся функциональном ряде. (3 балла)
5. Сформулировать и доказать теорему о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. (3 балла)
6. Сформулировать и доказать теорему о почленном интегрировании равномерно сходящегося функционального ряда. (3 балла)
7. Сформулировать теорему о почленном дифференцировании равномерно сходящегося функционального ряда, доказать ее в частном случае. (3 балла)
8. Сформулировать и доказать первую теорему Абеля о сходимости степенного ряда. (3 балла)
9. Сформулировать и доказать теорему Коши–Адамара об интервале и радиусе сходимости степенного ряда. (3 балла)
10. Сформулировать и доказать теорему о равномерной сходимости степенного ряда. (3 балла)
11. Сформулировать и доказать вторую теорему Абеля. (3 балла)
12. Сформулировать и доказать теорему о почленном интегрировании степенных рядов. (3 балла)
13. Сформулировать и доказать теорему о почленном дифференцировании степенных рядов. (3 балла)
14. Сформулировать и доказать теорему о связи степенного ряда с рядом Тейлора его суммы и теорему единственности для степенных рядов. (3 балла)
15. Дать определение ортогональной системы функций. Сформулировать и доказать теорему об ортогональности тригонометрической системы функций. (3 балла)
16. Сформулировать и доказать теорему ряде по ортогональной системе, сходящемся по норме. Коэффициенты Фурье. (3 балла)
17. Сформулировать и доказать теорему о неравенстве Бесселя. (3 балла)

18. Сформулировать и доказать теорему о равномерной сходимости тригонометрического ряда. (3 балла)
19. Сформулировать и доказать две теоремы о связи дифференцируемости суммы тригонометрического ряда Фурье с порядком малости его коэффициентов. (3 балла)
20. Вывести формулы для коэффициентов ряда Фурье по косинусам (синусам) на произвольном отрезке. (3 балла)
21. Сформулировать и доказать теорему о непрерывности собственного интеграла с параметром. (3 балла)
22. Сформулировать и доказать теорему о дифференцировании собственного интеграла по параметру в случае, когда и пределы интегрирования зависят от параметра. (3 балла)
23. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании собственного интеграла по параметру. (3 балла)
24. Сформулировать и доказать критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла с параметром. (3 балла)
25. Сформулировать и доказать признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла с параметром. (3 балла)
26. Сформулировать и доказать теорему о сведении равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, к равномерной сходимости функциональной последовательности. (3 балла)
27. Сформулировать и доказать теорему о непрерывности несобственного интеграла с параметром. (3 балла)
28. Сформулировать и доказать теорему о дифференцируемости несобственного интеграла с параметром. (3 балла)
29. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании несобственного интеграла с параметром. (3 балла)
30. Сформулировать признак Дини равномерной сходимости функциональной последовательности. (1 балл)
31. Сформулировать признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функционального ряда. (1 балл)
32. Дать определения кусочно-непрерывных и кусочно-гладких на отрезке функций. Сформулировать основную теорему о сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке. Сформулировать следствие о локальности тригонометрического ряда Фурье. (1 балл)
33. Сформулировать определение равномерной сходимости несобственного интеграла с параметром. (1 балл)

Тренировочный вариант

1. Исследовать на сходимость степенной ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{\ln(n+1)} \left(x - \frac{2}{3}\right)^n$. (3 балла)
2. Используя табличные разложения, разложить функцию $f(x) = \sqrt[4]{19-3x}$ по степеням $x-1$, указать интервал применимости разложения. (3 балла)
3. Вычислить с точностью до 0.001 интеграл: $\int_0^{1/3} \ln(1+x^2) dx$. (3 балла)
4. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}$ при $0 \leq \alpha < +\infty$. (3 балла)
5. Найти $I'(y)$ (в элементарных функциях), если $I(y) = \int_1^{y^2+1} \frac{\cos(y\sqrt[3]{x+1})}{x+1} dx$. (3 балла)
6. Разложить в тригонометрический ряд Фурье по \cos на $(0; 4)$:
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x < 2; \\ 3-x & \text{при } 2 \leq x < 4. \end{cases}$$
 Построить график суммы ряда Фурье. (3 балла)

Задачи для подготовки:

1. Найти решение задачи Коши в виде степенного ряда (записать первые 5 членов разложения): $y' = 2x - \ln y + 3$; $y(-3) = 1$. (3 балла)
2. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}$ при $-1 \leq \alpha < 4$. (3 балла)
3. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\alpha} \cos(\alpha x^2) \operatorname{arctg}(\alpha x)}{x^\alpha} dx$ при $3/2 \leq \alpha \leq 3$. (3 балла)
4. Дважды применяя (с обоснованием корректности) дифференцирование по параметру, найти интеграл $\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right)^2 dx$, $a, b > 0$. (3 балла)
5. Найти $I'(y)$ (в элементарных функциях), если $I(y) = \int_{y+1}^{y^2} \operatorname{tg} x e^{y \cos x} dx$. (3 балла)